Verbandstheoretische Betrachtung gewisser idealtheoretischer Fragen

Von O. STEINFELD in Budapest

§ 1. Einleitung

Es ist bekannt, daß die Menge aller Teilringe eines assoziativen Ringes eine multiplikative Halbgruppe und zugleich einen vollständigen Durchschnittshalbverband L bildet, in dem auch gewisse andere Bedingungen gelten. (Siehe (1)—(4).) Dem entsprechend definieren wir eine H-Halbgruppe L als eine multiplikative Halbgruppe und einen vollständigen Durchschnittshalbverband mit den Eigenschaften (1)—(4). Unser Zweck ist Ergebnisse über die H-Halbgruppen zu beweisen, aus denen neue oder bekannte idealtheoretische Sätze folgen.

In unseren Untersuchungen spielen die Absorbenten, die Primabsorbenten, die Halb-Primabsorbenten und die Absorbentenquotienten eine wichtige Rolle. Diese Begriffe kommen durch die Abstraktion der Begriffe des Ideals, des Primideals, des Halb-Primideals und der Idealquotienten zustande.

In § 2 beweisen wir einen Satz über die Absorbenten eines Elementes einer H-Halbgruppe, der eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes über die Ideale eines Ringes ist.

In Lemma 1 geben wir eine Eigenschaft der Primabsorbenten, aus der sich ergibt, daß ein Primideal eines Ringes R nicht nur bezüglich der Ideale von R, sondern auch bezüglich der Ideale der Ideale von R „prim" ist. Mit Hilfe von Lemma 1 bekommt man leicht das Ergebnis von McCoy, daß der Durchschnitt eines Ideals A und eines Primideals P eines Ringes ein Primideal von A ist.

Über die Absorbentenquotienten beweisen wir einige Sätze, aus denen als Spezialfall die Hauptresultate unserer früheren Arbeit über die Primideale und Idealquotiente folgen.

In § 5 definieren wir eine Radikalklasse in den H-Halbgruppen als einen Durchschnitt gewisser Primabsorbenten. In diese Radikalklasse gehören z. B.

das Brown—McCoysche, Fuchssche, Jacobsonsche und Krull—McCoysche Radikal eines assoziativen Ringes. Wir beweisen eine allgemeine Formel über diese Radikale, die die Bestimmung des Radikals eines Ringes R mit Hilfe des Radikals eines Ideals von R ermöglicht.

§ 2. Grundbegriffe

Es sei $L=\{a, b, \ldots\}$ eine multiplikative Halbgruppe und ein vollständiger Halbverband bezüglich der Durchschnittsoperation $\cap$.

Man kann in L durch

(1) $$a \leqq b \Longleftrightarrow a \cap b = a \qquad (a, b \in L)$$

eine Halbordnungsrelation $\leqq$ definieren. Es gelte

(2) $$a^2 \leqq a \qquad (a \in L),$$

(3) $$(\bigcap_{\omega\in\Omega} a_\omega) b \leqq \bigcap_{\omega\in\Omega} a_\omega b \quad \text{und} \quad b(\bigcap_{\omega\in\Omega} a_\omega) \leqq \bigcap_{\omega\in\Omega} b a_\omega \qquad (a_\omega, b \in L),$$

wo Ω eine beliebige Indexmenge bezeichnet. Wir verlangen endlich die Existenz der Elemente 0, $e(\in L)$ mit den Bedingungen

(4) $$0 \leqq x \leqq e \quad \text{und} \quad 0x = x0 = 0 \qquad (x \in L).$$

Eine algebraische Struktur L mit den obigen Eigenschaften wird eine *H-Halbgruppe* genannt. Mit L bezeichnen wir immer eine H-Halbgruppe.

Aus (1) und (3) folgt:

(5) $$a \leqq b \Longrightarrow ax \leqq bx \quad \text{und} \quad xa \leqq xb \qquad (a, b, x \in L).$$

Wir sagen, daß das Element $b(\in L)$ ein *Absorbent* eines Elementes $a(\in L)$ ist, wenn

(6) $$b \leqq a; \quad ba \leqq b, \quad ab \leqq b$$

bestehen.

Aus (4) sieht man, daß das Element 0 ein Absorbent jedes Elementes von L ist. Wegen (2) ist jedes Element ein Absorbent von sich selbst. Ist b ein Absorbent des Elementes $a(\in L)$, so sind $a \cap b, ab, ba$ und aba Absorbenten von b.

Satz 1. *Die Teilmenge A von L, die aus allen Absorbenten eines Elementes $a(\in L)$ besteht, ist eine H-Teilhalbgruppe von L. Man kann in A derart auch eine Vereinigungsoperation $\cup$ definieren, daß dann A einen vollständigen Verband bezüglich der Verknüpfungen $\cap$ und $\cup$ bildet, in dem auch*

(7) $$b(\bigcup_{\omega\in\Omega} a_\omega) \geqq \bigcup_{\omega\in\Omega} b a_\omega, \quad (\bigcup_{\omega\in\Omega} a_\omega) b \geqq \bigcup_{\omega\in\Omega} a_\omega b \qquad (a_\omega, b \in A)$$

und

(8) $$a_1 \cdots a_k \leqq a_1 \cap \cdots \cap a_k \qquad (a_1, \ldots, a_k \in A)$$

gelten.

Beweis. Sind a_1, a_2 zwei Elemente von A, so gilt nach (5), (6)

(9) $$a_1 a_2 \leqq a_1 a \leqq a_1 \leqq a \quad \text{und} \quad a_1 a_2 \leqq a a_2 \leqq a_2 \leqq a.$$

Aus (9) folgt

(10) $$a_1 a_2 \leqq a_1 \cap a_2,$$

woraus man infolge (3) mit vollständiger Induktion

$$(a_1 \cdots a_{k-1}) a_k \leqq (a_1 \cap \cdots \cap a_{k-1}) a_k \leqq a_1 a_k \cap \cdots \cap a_{k-1} a_k \leqq$$
$$\leqq (a_1 \cap a_k) \cap \cdots \cap (a_{k-1} \cap a_k) = a_1 \cap \cdots \cap a_{k-1} \cap a_k$$

bekommt, womit (8) bewiesen ist.

Da

$$(a_1 a_2) a = a_1 (a_2 a) \leqq a_1 a_2 \quad \text{und} \quad a(a_1 a_2) \leqq a_1 a_2$$

gelten, ist $a_1 a_2$ ein Absorbent von a. Das sichert, daß A eine Teilhalbgruppe von L ist. Sind $a_\omega (\omega \in \Omega)$ Elemente von A, so sind $\bigcap_{\omega \in \Omega} a_\omega \leqq a$ und wegen (3), (6)

(11) $$\Big(\bigcap_{\omega \in \Omega} a_\omega\Big) a \leqq \bigcap_{\omega \in \Omega} a_\omega a \leqq \bigcap_{\omega \in \Omega} a_\omega \quad \text{und} \quad a\Big(\bigcap_{\omega \in \Omega} a_\omega\Big) \leqq \bigcap_{\omega \in \Omega} a_\omega$$

richtig. $\bigcap_{\omega \in \Omega} a_\omega$ ist also ein Element von A. Damit ist A ein vollständiger Teilhalbverband von L.

Wegen (4_2) und (2) sind 0 und a Elemente von A und statt (4_1) gilt nach (6_1) für jedes $y (\in A)$

(12) $$0 \leqq y \leqq a \qquad (y \in A).$$

Damit haben wir bewiesen, daß A eine H-Teilhalbgruppe von L ist.

Wir definieren für beliebig viele Elemente a_μ von A eine Vereinigungsoperation $\cup$ durch

(13) $$\bigcup_\mu a_\mu = \bigcap d_\lambda,$$

wo d_λ die in A liegenden gemeinsamen oberen Schranken aller a_μ durchläuft[1]).

Man kann leicht einsehen, daß A bezüglich der in ihm definierten Verknüpfungen $\cap$ und $\cup$ einen vollständigen Verband bildet, in dem auch (7) gültig ist.

Damit ist der Beweis beendet.

---

[1]) Die Verknüpfung $\cup$ in A läßt sich auf eine einzige Art definieren derart, daß hierdurch A zu einem Verband wird. (Siehe Rédei [7] Satz 142.)

Beispiel 1. Es sei R ein assoziativer Ring. Die Menge L_1 aller Teilringe von R bildet eine multiplikative Halbgruppe und einen vollständigen Halbverband bezüglich der Durchschnittsbildung. Es ist leicht einzusehen, daß die Bedingungen (1)—(4) in L_1 gültig sind, somit ist L_1 eine H-Halbgruppe. Die Absorbenten eines Elementes von L_1 sind die Ideale (dieses Elementes d. h.) eines Teilringes von R. Aus Satz 1 ergeben sich wohlbekannte Ergebnisse über die Ideale eines Teilringes. Es ist bekannt, daß (7) sogar auch (7*) für die Ideale eines Teilringes von R erfüllt ist.

Beispiel 2. Ist K eine Halbgruppe mit Nullelement, so bildet die Menge L_2 aller Teilhalbgruppen mit Nullelement von K eine H-Halbgruppe.

Beispiel 3. Bezeichne L_3 die Menge aller (zweiseitigen) Ideale der (zweiseitigen) Ideale eines assoziativen Ringes. Es ist nicht schwer einzusehen, daß L_3 eine H-Halbgruppe ist.

Beispiel 4. In einer Halbgruppe K mit Nullelement bilden alle (zweiseitigen) Ideale mit Nullelement der (zweiseitigen) Ideale mit Nullelement von K eine H-Halbgruppe.

§ 3. Ergebnisse über die Primabsorbenten

Es sei a ein Element von L. Einen Absorbenten p von a nennen wir *prim* (oder einen *Primabsorbenten*), wenn für irgendwelche Absorbenten m, n von a die Regel

$$mn \leqq p \Longrightarrow m \leqq p \quad \text{oder} \quad n \leqq p$$

gilt.

Ein Element $c(\in L)$ wird ein *Subabsorbent* des Elementes $a(\in L)$ genannt, wenn es ein Element $b(\in L)$ gibt, so daß c ein Absorbent von b und b ein Absorbent von a ist.

Betrachten wir den Subabsorbenten c des Elementes a. Die Elemente c, ca, ac, aca sind nach der Definition lauter Absorbenten des Elementes b, deshalb ist das Element $\{c\}_a = c \cup ca \cup ac \cup aca$ nach Satz 1 auch ein Absorbent von b.

Wir machen von jetzt an die sehr wesentliche Voraussetzung:

$$(7^*) \qquad b(\bigcup_{\omega\in\Omega} a_\omega) = \bigcup_{\omega\in\Omega} ba_\omega \quad \text{und} \quad (\bigcup_{\omega\in\Omega} a_\omega)b = \bigcup_{\omega\in\Omega} a_\omega b,$$

wo a_ω und b Absorbenten eines gegebenen Elementes von L sind.

Wegen der Voraussetzung (7*) ist $\{c\}_a$ ein Absorbent des Elementes a.

Lemma 1. *Sind x, y zwei Subabsorbenten und p ein Primabsorbent des Elementes $a(\in L)$, so folgt aus*

$$xy \leqq p$$

entweder $x \leqq p$ oder $y \leqq p$.

Beweis. Nach der Voraussetzung existieren zwei Absorbenten a_1, a_2 von a, so daß x ein Absorbent von a_1 und y ein Absorbent von a_2 ist. Gilt

$$xy \leqq p, \tag{14}$$

so besteht

$$a_1 x a_1 \cdot a_2 y a_2 \leqq xy \leqq p. \tag{15}$$

Da $a_1 x a_1$, $a_2 y a_2$ Absorbenten und p ein Primabsorbent von a sind folgt aus (15)

$$a_1 x a_1 \leqq p \quad \text{oder} \quad a_2 y a_2 \leqq p. \tag{16}$$

Ist z. B. $a_1 x a_1 \leqq p$, so betrachten wir das Produkt $a_1 \{x\}_a a_1$. Infolge der Annahme (7*) besteht

$$a_1\{x\}_a a_1 = a_1(x \cup xa \cup ax \cup axa)a_1 = a_1 x a_1 \cup a_1 x a a_1 \cup a_1 a x a_1 \cup a_1 a x a a_1 = a_1 x a_1 \leqq p,$$

deshalb gilt entweder $a_1 \leqq p$ oder $\{x\}_a \leqq p$, woraus in beiden Fällen $x \leqq p$ folgt.

Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Aus Lemma 1 sieht man, daß aus der „Primeigenschaft" bezüglich der Absorbenten die „Primeigenschaft" bezüglich der Subabsorbenten folgt.

Wir sagen, daß $p(\in L)$ ein *Primelement* in L ist, wenn für beliebige Elemente $x, y(\in L)$ aus

$$xy \leqq p$$

$x \leqq p$ oder $y \leqq p$ folgt.

Aus Lemma 1 bekommt man unmittelbar:

Korollar 1. *Ist jedes Element von L ein Subabsorbent von e, so ist ein Primabsorbent von e ein Primelement in L.*

Lemma 1 besagt für Ringe folgendes: Es bezeichnen A, B zwei Ideale und P ein Primideal[2]) eines assoziativen Ringes R. Besteht für das Ideal X von A und für das Ideal Y von B die Bedingung

$$XY \subseteqq P,$$

so gilt $X \subseteqq P$ oder $Y \subseteqq P$.

Man sieht, daß Korollar 1 auf die H-Halbgruppen L_3 (s. Beispiel 3) und L_4 (s. Beispiel 4) anwendbar ist.

Lemma 2. *Ist b ein Absorbent und p ein Primabsorbent des Elementes $a(\in L)$, so ist $b \cap p$ ein Primabsorbent von b.*

---

[2]) Ein Ideal P eines assoziativen Ringes R nennen wir ein *Primideal,* wenn für irgendwelche Ideale A, B von R die Regel

$$AB \subseteqq P \Longrightarrow A \subseteqq P \quad \text{oder} \quad B \subseteqq P$$

gilt.

Ein Ideal S von R heißt nach Nagata [6] *Halb-Primideal,* wenn S ein Durchschnitt von Primidealen ist.

Beweis. $b \cap p = b'$ ist offenbar ein Absorbent von b. Sind x, y zwei Absorbenten von b mit

$$xy \leqq p' = b \cap p \leqq p,$$

so gilt nach Lemma 1 entweder $x \leqq p$ oder $y \leqq p$. Dies bedeutet wegen $x \leqq b$ und $y \leqq b$, daß $x \leqq p'$ oder $y \leqq p'$ gilt, womit unser Beweis beendet ist.

Ein Element $s(\in L)$ heißt *Halb-Primabsorbent* des Elementes $a(\in L)$, wenn s ein Durchschnitt von Primabsorbenten von a ist.

Aus Lemma 2 folgt unmittelbar

Lemma 2'. *Ist b ein Absorbent und s ein Halb-Primabsorbent des Elementes $a(\in L)$, so ist $b \cap s$ ein Halb-Primabsorbent von b.*

Lemma 3. *Ist b ein Absorbent des Elementes $a(\in L)$ und s ein Halb-Primabsorbent von b, so ist s ein Absorbent von a.*

Beweis. Im Falle $s = b$ ist die Behauptung trivial. Offenbar ist es genug zu zeigen, daß ein Primabsorbent $p(\neq b)$ von b ein Absorbent von a ist. Da $bap \leqq p$ und $b \not\leqq p$ gilt, muß $ap \leqq p$ bestehen. Ebenso bekommt man: $pa \leqq p$, womit Lemma 3 bewiesen ist.

Aus Lemma 2 bzw. Lemma 3 bekommt man als einen speziellen Fall die folgenden bekannten Ergebnisse:

Ist A ein Ideal und P ein Primideal eines assoziativen Ringes R, so ist $A \cap P$ ein Primideal von A. (McCoy [5] Lemma 2.)

Ist A ein Ideal eines assoziativen Ringes R und S ein Halb-Primideal von A, so ist S ein Ideal von R. (Nagata [6] Remark 2.)

§ 4. Über die Absorbentenquotienten

Betrachten wir zwei Absorbenten a, b des Elementes $e(\in L)$. Die Vereinigung der Absorbenten x von e, welche die Bedingung

$$xa \leqq b \tag{17}$$

befriedigen, heißt ein *linksseitiger Absorbentenquotient* und wird durch $(b:a)_l$ bezeichnet.

Wegen $ba \leqq be \leqq b$ befriedigt das Element b die Bedingung (17), woraus

$$b \leqq (b:a)_l \tag{18}$$

folgt. Nach Satz 1 ist $(b:a)_l$ ein Absorbent von e und wegen (17), (7*) gilt[3])

$$(b:a)_l a \leqq b. \tag{19}$$

[3]) Aus der Definition und (19) sieht man, daß $(b:a)_l$ der größte Absorbent von e ist, der die Bedingung (17) befriedigt.

Ähnlich heißt der *rechtsseitige Absorbentenquotient* $(b:a)_r$ die Vereinigung der Absorbenten x von e, die die Bedingung

$$(17') \qquad ax \leqq b$$

befriedigen.

Die Vereinigung der Absorbenten x von e, die die Bedingungen (17) und (17′) gleichzeitig befriedigen, wird *Absorbentenquotient* genannt und durch $b:a$ bezeichnet.

Natürlich gelten auch

$$(18') \qquad b \leqq (b:a)_r, \quad b \leqq b:a$$

und

$$(19') \qquad a(b:a)_r \leqq b; \quad (b:a)a \leqq b, \quad a(b:a) \leqq b.$$

Es ist leicht die folgenden wichtigen Formeln

$$(20) \quad ((\bigcap_{\omega\in\Omega} b_\omega):a)_l = \bigcap_{\omega\in\Omega}(b_\omega:a)_l; \quad ((\bigcap_{\omega\in\Omega} b_\omega):a)_r = \bigcap_{\omega\in\Omega}(b_\omega:a)_r; \quad (\bigcap_{\omega\in\Omega} b_\omega):a = \bigcap_{\omega\in\Omega}(b_\omega:a)$$

nachzuweisen, wo b_ω, a Absorbenten des Elementes e sind.

Einerseits gilt nämlich nach (19)

$$((\bigcap_{\omega\in\Omega} b_\omega):a)_l a \leqq \bigcap_{\omega\in\Omega} b_\omega \leqq b_\omega \qquad (\omega \in \Omega),$$

woraus

$$(21) \qquad ((\bigcap_{\omega\in\Omega} b_\omega):a)_l \leqq \bigcap_{\omega\in\Omega}(b_\omega:a)_l$$

folgt.

Anderseits gilt nach (3_1) und (19)

$$(\bigcap_{\omega\in\Omega}(b_\omega:a)_l)a \leqq \bigcap_{\omega\in\Omega}((b_\omega:a)_l a) \leqq \bigcap b_\omega,$$

woraus man

$$(21') \qquad \bigcap_{\omega\in\Omega}(b_\omega:a)_l \leqq ((\bigcap_{\omega\in\Omega} b_\omega):a)_l$$

bekommt.

(21) und (21′) zeigen die Gültigkeit von (20_1). Ähnlich sieht man auch (20_2) und (20_3) ein.

Satz 2. *Es sei a ein Absorbent des Elementes $e(\in L)$ und p ein Primabsorbent von a. Der Absorbentenquotient $p:a$ ist dann ein Primabsorbent von e, ferner gelten*

$$(22) \qquad (p:a) \cap a = p$$

und

$$(23) \qquad p:a = (p:a)_l = (p:a)_r.$$

Im Fall $p \neq a$ ist $p:a$ der einzige Primabsorbent von e, deren Durchschnitt *mit a das Element p ist, ferner ist dieses dann und nur dann ein Primabsorbent von e, wenn $p:a=p$ gilt*[4]).

Beweis. Nach Lemma 3 ist p ein Absorbent von e, deshalb existieren die in (23) erwähnten Absorbentenquotienten.

Ist $p=a$, so gilt $(a:a)_l=(a:a)_r=a:a=e$, ferner gilt auch (22).

Setzen wir nachher $p\neq a$ voraus. Wir zeigen zuerst, daß $(p:a)_l$ ein Primabsorbent von e ist. Gilt für die Absorbenten m, n von e die Bedingung $mn\leqq(p:a)_l$, so besteht

$$am\cdot na\leqq mna\leqq p. \tag{24}$$

Da am und na zwei Absorbenten von a sind, muß wegen (24) $am\leqq p$ oder $na\leqq p$ bestehen.

Im Fall $na\leqq p$ ist $n\leqq(p:a)_l$.

Wenn $am\leqq p$ gilt, gilt auch $a\cdot ma\leqq p$, woraus wegen $a\not\leqq p$ die Relation $ma\leqq p$ d. h. $m\leqq(p:a)_l$ folgt.

Jetzt zeigen wir

$$(p:a)_l=(p:a)_r. \tag{25}$$

Nach der Definition besteht

$$a(p:a)_l\cdot a\leqq(p:a)_l a\leqq p \quad \text{und} \quad a\not\leqq p,$$

woraus $a(p:a)_l\leqq p$ folgt. Es gilt also $(p:a)_l\leqq(p:a)_r$. Ebenso sieht man ein, daß $(p:a)_r\leqq(p:a)_l$ ist. Damit haben wir (25) und zugleich (23) bewiesen.

Da wegen (3) und (19)

$$((p:a)_l\cap a)a\leqq(p:a)_l a\cap a^2\leqq p\cap a^2\leqq p \quad \text{und} \quad a\not\leqq p$$

bestehen und $(p:a)_l\cap a$ ein Absorbent von a ist, muß $(p:a)_l\cap a\leqq p$ sein. Offenbar gilt auch $p\leqq(p:a)_l\cap a$, weshalb (22) infolge (23) bewiesen ist.

Ist r ein Primabsorbent von e mit der Eigenschaft

$$r\cap a=p \qquad (a\not\leqq p), \tag{26}$$

so besteht wegen (26) und (8)

$$ra\leqq r\cap a=p,$$

woraus $r\leqq(p:a)_l$ folgt. Umgekehrt muß wegen $(p:a)_l a\leqq p\leqq r$ und $a\leqq r$ die Bedingung $(p:a)_l\leqq r$ erfüllt sein, womit $r=(p:a)_l=p:a$ bewiesen ist.

---

[4]) Es wäre möglich die Absorbentenquotienten nicht bezüglich e, sondern bezüglich eines beliebigen festgewählten Elementes von L zu definieren und Satz 2 in diesem allgemeinerem Fall zu beweisen. Der Einfachkeit halber beschäftigen wir uns nur mit dem obigen Falle.

Wenn $p = p:a$ gilt, so ist p, wie wir oben bewiesen haben, ein Primabsorbent von e.

Umgekehrt wenn $(p:a)_l = p:a \neq p$, folglich $(p:a)_l \not\geq p$ gilt, so bekommt man aus

$$(p:a)_l a \leqq p \qquad (a \not\leqq p),$$

daß p kein Primabsorbent von e ist. Somit ist der Beweis von Satz 2 vollendet.

Das *Intervall* $[a, b]$ $(a, b \in L)$ besteht aus den Elementen $x (\in L)$ mit $a \leqq x \leqq b$.

Einen Absorbenten b des Elementes $a (\in L)$ nennen wir *eigentlich*, wenn $b \neq a$ gilt.

Korollar 2. *Ist a ein Absorbent des Elementes e, so besitzt e dann und nur dann einen eigentlichen Primabsorbenten, wenn entweder a einen eigentlichen Primabsorbenten hat oder in dem Intervall $[a, e]$ ein eigentlicher Primabsorbent von e existiert.*

Beweis. Es sei q ein eigentlicher Primabsorbent von e. Dann gilt entweder $q \cap a = a$ oder $q \cap a < a$. Im ersten Falle liegt q in dem Intervall $[a, e]$; im zweiten Fall ist $q \cap a$ nach Lemma 2 ein eigentlicher Primabsorbent von a.

Ist p ein eigentlicher Primabsorbent des Elementes a, so ist der Absorbentenquotient $p:a$ nach Satz 2 ein eigentlicher Primabsorbent von e.

Aus Satz 2 und Korollar 2 ergibt sich:

Korollar 3. *Mit Hilfe eines Absorbenten a des Elementes e läßt sich die Menge aller eigentlichen Primabsorbenten von e folgenderweise überblicken: Man bilde die Absorbentenquotienten $p_\alpha : a$ für alle eigentlichen Primabsorbenten p_α von a: So entstehen alle eigentlichen Primabsorbenten q_α von e mit $a \not\leqq q_\alpha$. Die übrigen Primabsorbenten von e liegen im Intervall $[a, e]$*[5]*).*

Über die Halb-Primabsorbenten beweisen wir folgendes

Lemma 4. *Es sei a ein Absorbent und v ein Halb-Primabsorbent des Elementes $e (\in L)$. Man betrachte eine gegebene Darstellung*

$$v = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda$$

von v mit Hilfe von Primabsorbenten p_λ von e, unter welchen auch $p_{\lambda_0} = e$ vorkommt. Dann gilt die Formel

$$v = (v:a) \cap \bar{v},$$

wo $\bar{v} = \bigcap_{a \leqq p_\lambda} p_\lambda$ ist.

[5]) Man kann in L auch Primärabsorbenten definieren, für die dann die vorigen Ergebnisse unter geeigneten Voraussetzungen gültig bleiben.

Beweis. Gilt für jedes p_λ die Bedingung $a \leqq p_\lambda$, so besteht wegen $a \leqq v$ auch

$$v : a = e,$$

woraus die Behauptung $v = (v : a) \cap \bar{v} = e \cap \bar{v} = \bar{v}$ folgt.

Existiert mindestens ein Primabsorbent $p_{\lambda'}$ mit $a \not\leqq p_{\lambda'}$, so besteht

$$v = \Big(\bigcap_{a \not\leqq p_{\lambda'}} p_{\lambda'} \Big) \cap \Big(\bigcap_{a \leqq p_{\lambda''}} p_{\lambda''} \Big) = v_1 \cap v_2 .$$

Da nach der Definition $\bar{v} = v_2$ gibt, bleibt nur

$$v_1 = \bigcap_{a \not\leqq p_{\lambda'}} p_{\lambda'} = v : a$$

zu beweisen. Wegen (20_3) und $a \leqq v_2$ ergibt sich

$$v : a = (v_1 \cap v_2) : a = (v_1 : a) \cap (v_2 : a) = (v_1 : a) \cap e = v_1 : a .$$

So haben wir

$$v_1 = v_1 : a$$

zu zeigen. Nach $(18_2')$ gilt einerseits $v_1 \leqq v_1 : a$. Anderseits besteht nach (19′)

$$(v_1 : a) a \leqq v_1 = \bigcap_{a \not\leqq p_{\lambda'}} p_{\lambda'} ,$$

woraus $(v_1 : a) a \leqq p_{\lambda'}$ folgt. Wegen der Voraussetzung $a \not\leqq p_{\lambda'}$ muß für jedes $p_{\lambda'}$

$$v_1 : a \leqq p_{\lambda'} \Longrightarrow v_1 : a \leqq \bigcap_{a \not\leqq p_{\lambda'}} p_{\lambda'} = v_1$$

bestehen.

Damit ist $v_1 = v_1 : a$ bewiesen, wodurch der Beweis von Lemma 4 beendet ist.

Satz 2′. *Es sei a ein Absorbent des Elementes $e (\in L)$ und bezeichne s einen Halb-Primabsorbenten von a. Der Absorbentenquotient $s : a$ ist dann ein Halb-Primabsorbent von e, ferner gelten*

$$(s : a) \cap a = s \tag{27}$$

und

$$s : a = (s : a)_l = (s : a)_r . \tag{28}$$

Im Falle $s \neq a$ ist jeder Halb-Primabsorbent t von e, deren Durchschnitt mit a das Element s ist, in der Form

$$t = (s : a) \cap u \tag{29}$$

darstellbar, wo u ein beliebiger Halb-Primabsorbent von e mit $a \leqq u$ bezeichnet. $s (\neq a)$ ist dann und nur dann ein Halb-Primabsorbent von e, wenn $s = t$ gilt.

Beweis. Nach Lemma 3 ist s ein Absorbent von e, also existieren die in (28) erwähnten Absorbentenquotienten.

Es sei $s = \bigcap_{\omega \in \Omega} p_\omega$, wobei die p_ω Primabsorbenten von a sind. Wegen (20_3) besteht

(30) $$s:a = (\bigcap_{\omega \in \Omega} p_\omega):a = \bigcap_{\omega \in \Omega} (p_\omega : a).$$

Die Absorbentenquotienten $p_\omega : a$ sind nach Satz 2 Primabsorbenten von e, folglich ist $s:a$ ein Halb-Primabsorbent von e. Nach (30) und (22) gilt:

$$(s:a) \cap a = (\bigcap_{\omega \in \Omega} (p_\omega : a)) \cap a = \bigcap_{\omega \in \Omega} ((p_\omega : a) \cap a) = \bigcap_{\omega \in \Omega} p_\omega = s,$$

wodurch (27) nachgewiesen ist. Aus (30), (23) und (20) bekommt man die Behauptung (28).

Um (29) zu zeigen, bezeichne $t = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} q_\lambda$ $(q_{\lambda_0} = e)$ einen Halb-Primabsorbenten von e mit

(31) $$s = t \cap a = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (q_\lambda \cap a) < a.$$

Infolge Lemma 4 besteht

(32) $$t = (t:a) \cap \bar{t},$$

wobei $\bar{t} = \bigcap_{a \leqq q_\lambda} q_\lambda$ ist. Wir haben nur

(33) $$t:a = s:a$$

zu beweisen. Nach (31) und (20_3) gilt

(34) $$s:a = (t \cap a):a = (t:a) \cap (a:a) = t:a,$$

was die Behauptung (33) nachweist.

Gilt $s = t$, so ist s ein Halb-Primabsorbent von e. Ist umgekehrt s ein Halb-Primabsorbent von e, so ist s wegen $s \cap a = s$ in der Form $s = t = (s:a) \cap u$ darstellbar. Somit ist der Beweis beendet.

Die Begriffe der verschiedenen Absorbentenquotienten stimmen in Ringen (Halbgruppen) mit den Begriffen der ein- und zweiseitigen Idealquotienten überein[6]).

Aus Satz 2, Korollar 2 und 3 bekommt man durch eine Spezialisierung den Satz 1, das Korollar 1 und die Bemerkung 5 unserer Arbeit [8].

So besagt Satz 2′ z. B. für Ringe den folgenden:

Satz 3. *Es sei A ein Ideal eines assoziativen Ringes R und bezeichne S ein Halb-Primideal von A. Der Idealquotient $S:A$ ist ein Halb-Primideal von R und es gilt:*

$$(S:A) \cap A = S, \quad S:A = (S:A)_l = (S:A)_r.$$

---

[6]) Sind A und B zwei Ideale eines assoziativen Ringes R, so besteht z. B. der *linksseitige Idealquotient* $(B:A)_l$ aus den Elementen $x (\in R)$, die die Bedingung

$$xA \subseteq B$$

befriedigen. In den Halbgruppen definiert man diesen Begriff ähnlich.

Im Fall $S \neq A$ ist jedes Halb-Primideal T von R, deren Durchschnitt mit A das Ideal S ist, in der Form

$$T = (S : A) \cap U$$

darstellbar, wo U ein beliebiges Halb-Primideal von R mit $A \subseteq U$ bezeichnet. $S \neq A$ ist dann und nur dann ein Halb-Primideal von R, wenn $S = T$ gilt.

§ 5. Ergebnisse über gewisse Radikale

Es seien $a, b (a < b)$ zwei Absorbenten des Elementes $e (\in L)$. Den (nichtleeren) Durchschnitt aller Primabsorbenten von b, die im Intervall $[a, b]$ liegen und eine gegebene Eigenschaft (T) haben, nennen wir das *T-Radikal des Intervalls* $[a, b]$ und bezeichnen dieses mit $T[a, b]$. Hat aber das Element b keinen Primabsorbenten mit der Eigenschaft (T) im Intervall $[a, b]$, so werde $T[a, b] = b$ gesetzt.

Aus Lemma 4 bekommt man unmittelbar

Satz 4. *Ist a ein Absorbent des Elements $e (\in L)$, so gilt die Formel*

(35) $$T[0, e] = (T[0, e] : a) \cap T[a, e].$$

Aus Satz 4 ergibt sich leicht das folgende

Korollar. *Es sei a ein Absorbent des Elementes e. Besteht für das T-Radikal $T[0, a]$ des Intervalls $[0, a]$ die Bedingung*

(36) $$T[0, a] = T[0, e] \cap a,$$

so gilt

(37) $$T[0, e] = (T[0, a] : a) \cap T[a, e].$$

Beweis. Wegen (36) und (20) besteht

$$T[0, a] : a = (T[0, e] \cap a) : a = (T[0, e] : a) \cap (a : a) = T[0, e] : a,$$

woraus nach (35) die Behauptung (37) folgt.

Satz 4 und Korollar 4 wollen wir auf gewisse Radikale eines assoziativen Ringes R anwenden. Zu diesem Zweck bezeichne L nun die H-Halbgruppe aller Teilringe eines assoziativen Ringes R. Sind $A, B (A \subset B)$ zwei Ideale des Ringes R, so nennen wir den nichtleeren Durchschnitt aller Primideale des Teilringes B, die das Ideal A enthalten und eine gegebene Eigenschaft (T) haben, das *T-Radikal* von B *über* A, und wir bezeichnen es mit $T[A, B]$. Hat der Teilring B kein das Ideal A enthaltendes Primideal mit der Eigenschaft (T), so gelte $T[A, B] = B$.

Jetzt geben wir die Definitionen gewisser bekannter Radikale an, die sich als lauter T-Radikale erweisen.

Das *Brown—McCoysche Radikal* eines Ringes R ist der nichtleere Durchschnitt aller Ideale M von R, für die der Faktorring R/M einfach und mit Einselement ist. (Siehe BROWN—MCCOY [1].) Es ist bekannt, daß die Ideale M mit der obigen Eigenschaft Primideale von R sind. (Siehe z. B. RÉDEI [7], Satz 186.)

Das *M-Radikal* bei NAGATA [6] ist der nichtleere Durchschnitt aller Primideale P des Ringes R, für die der Faktorring R/P einfach ist.

Das *Fuchssche Radikal* eines Ringes R ist der nichtleere Durchschnitt aller Z-maximalen Ideale von R und jedes Z-maximale Ideal ist ein Primideal von R. (Siehe FUCHS [2] und [2a].)

Das *Krull—McCoysche Radikal* eines Ringes R ist der nichtleere Durchschnitt aller Primideale von R. (Siehe MCCOY [5] und NAGATA [6].)

Das *Jacobsonsche Radikal* eines Ringes R ist der nichtleere Durchschnitt aller primitiven Ideale von R. (Siehe JACOBSON [3], [4] und Nagata [6].) Es ist bekannt, daß jedes primitive Ideal ein Primideal von R ist. (Siehe z. B. NAGATA [6].)

Aus Satz 4 bekommt man den

Satz 5. *Ist A ein Ideal eines assoziativen Ringes R, so gilt die Formel*

$$T[0, R] = (T[0, R] : A) \cap T[A, B]. \tag{38}$$

Unter den oben erwähnten Radikalen haben das Brown—McCoysche, Jacobsonsche und Krull—McCoysche Radikal auch die Eigenschaft:

$$T[0, A] = T[0, R] \cap A \tag{39}$$

für jedes Ideal A von R.

Wir nennen ein T-Radikal, welches auch die Bedingung (39) befriedigt, *T^*-Radikal*, und bezeichnen es mit $T^*[A, B]$. Nach Korollar 4 gilt

Korollar 5. *Ist A ein Ideal des Ringes R, so besteht die Formel*[7])

$$T^*[0, R] = (T^*[0, A] : A) \cap T^*[A, R]. \tag{40}$$

[7]) J. SZENDREI [9] hat ein ähnliches Ergebnis über das Jacobsonsche Radikal eines Ringes bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] B. Brown—N. H. McCoy, Radicals and subdirect sums, *American Journal of Math.*, **69** (1947), 46—58.

[2] Fuchs László, A radikálnak egy új definíciója, *Első Magyar Matematikai Kongresszus Közl.* (1952), 435—443.

[2a] L. Fuchs, On a new type of radical, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 43—53.

[3] N. Jacobson, The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, *American Journal of Math.*, **67** (1945), 300—320.

[4] N. Jacobson, *Structure of rings* (New York, 1956).

[5] N. H. McCoy, Prime ideals in general rings, *American Journal of Math.*, **71** (1949), 823—833.

[6] M. Nagata, On the theory of radicals in a ring, *Journal Math. Soc. Japan*, **3** (1951), 330—344.

[7] L. Rédei, *Algebra* I (Leipzig, 1959).

[8] O. Steinfeld, On ideal-quotients and prime ideals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), 289—298.

[9] J. Szendrei, On the Jacobson radical of a ring, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955), 93—97.

(Eingegangen am 6. August 1960)